6. Séries alternadas (SA)

Séries alternadas têm forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} x_n,$$

com $x_n > 0$. Por exemplo

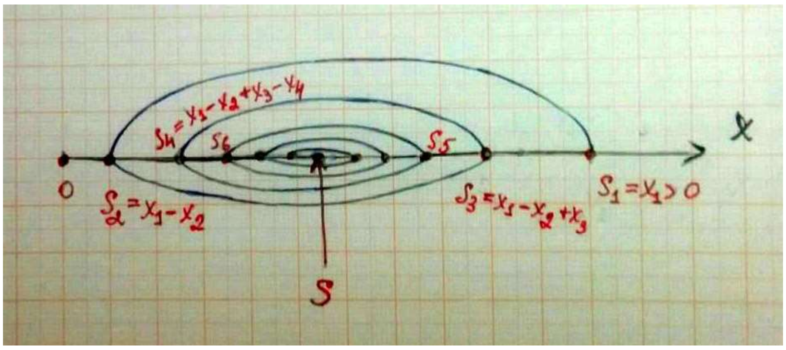
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Teorema 6.0.1 — Teste de SA ou Teste de Leibniz. Seja uma série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ (ou $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$), com $x_n > 0$. Se

1) $\{x_n\}$ for decresce, isto é $x_{n+1} \leq x_n$, e
2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$,

então a série alternada converge.

Ideia da demonstração. Consideremos as somas parciais s_n de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$. Da Figura abaixo é fácil ver que a sequência s_n das somas parciais acumula-se num ponto s (isso segue do fato que x_n decresce), então a série converge.



■

Corolario 6.0.2 1) $S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n-1)}x_n>0$, pois $s_1=x_1>0$.
2) $S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}x_n<0$, pois $s_1=-x_1<0$.

■ **Exemplo 6.1** Dada a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$. Denotamos $y_n=(-1)^n\frac{1}{n}$. Se $x_n=\frac{1}{n}$, assim $x_{n+1}<x_n$ (pois $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$) e $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, logo $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ converge.

Por outro lado, $\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, portanto $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ converge condicionalmente.

■ **Exemplo 6.2** Dada a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$. Estude o tipo de convergência.

Solução. Denotamos $y_n=(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ - diverge pelo TC. De fato, $\frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n}$, para $n\geq 3$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge. Portanto podemos concluir que a série não converge absolutamente.

b) Usamos Teorema 6.0.1 (ou Teste de Leibniz). Mostremos que $\{x_n\}=\{\frac{\ln n}{n}\}$ decresce. Seja $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, assim

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}<0,$$

para $\ln x>1$ ou $x>e$. Logo

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1}>\frac{\ln n}{n},\quad n\geq 3,$$

e

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

Portanto, pelo Teorema 6.0.1 a série$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ converge condicionalmente. ;-)

6.1 Estimativa do erro nas SA

Seja $S=\sum_{n=1}^{\infty}y_n=\sum_{k=1}^{n}y_k+\sum_{k=n+1}\infty y_k$. Denotando $S_n=\sum_{k=1}^{n}y_k$ e $R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}y_k$, chamemos

$$R_n=S-S_n,$$

o erro da aproximação.

Teorema 6.1.1 — Estimativa do erro. Seja $S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x_n$ (ou $s=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}x_n$), $x_n>0$. Se

1) $0\leq x_{n+1}\leq x_n$ e
2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,

então

$$|R_n| = |S - S_n| \leq x_{n+1}.$$

Demonstração. Temos (veja Figura acima)

$$|R_n| = |S - S_n| \leq |S_{n+1} - S_n| = x_{n+1},$$

assim $|R_n| \leq x_{n+1}$. ■

■ **Exemplo 6.3** Seja $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$. Ache n tal que $|R_n| < \frac{1}{10^3}$.

Solução. Pelo Teorema 6.1.1, $|R_n| \leq x_n = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{10^3}$, isto é $(n+1)^2 > 10^3$, ou seja $n+1 > 10^{\frac{3}{2}}$. Portanto $n > 10^{\frac{3}{2}} - 1 \approx 30,6$. Logo $n \geq 31$. ;-)

■ **Exemplo 6.4** Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{1+n^8}$ com erro inferior $\frac{3}{10^3}$.

Solução. Sabemos que

$$|R_n| \leq x_{n+1} = \frac{1}{1+(n+1)^8} < \frac{3}{10^3},$$

ou seja $1 + (n+1)^8 > \frac{10^3}{3}$, ou da forma equivalente

$$(n+1)^8 > \frac{10^3 - 3}{3},$$

$$n > \sqrt[8]{\frac{10^3 - 3}{3}} - 1 \approx 1,07,$$

logo $n \geq 2$. Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{1+n^8} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{1+256} = \frac{1}{2} - \frac{1}{257}.$$

;-)

■ **Exemplo 6.5** Estude o tipo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan(n)}{n}$.

Solução. Seja $y_n = (-1)^n \frac{\arctan(n)}{n}$. Assim

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n} \leq |y_n| = \left| \frac{\arctan(n)}{n} \right| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n}.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n} = \frac{\pi}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, então a série inicial não converge absolutamente.

Usamos o Teorema de Leibniz. Como $|y_n| < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n}$, temos $\lim_{n\to\infty} |y_n| = 0$. Seja

$$f(x) = \frac{\arctan x}{x},$$

logo

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2} - \arctan x}{x^2} = \frac{x - (1+x^2)\arctan x}{x^2(1+x^2)}.$$

Temos

$$x - (1+x^2)\arctan x < x - \frac{\pi}{4}(1+x^2) < x - \frac{3}{4}(1+x^2) < 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim $\{y_n\}$ é decrescente. Pelo o Teorema de Leibniz, série converge condicionalmente. ;-)

■ **Exemplo 6.6** Estude tipo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n^2}{3n^2-n-1}\right)^{3n+1}$.

Solução. Seja $y_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{n^2}{3n^2-n-1}\right)^{3n+1}$, assim $|y_n| = \left(\frac{n^2}{3n^2-n-1}\right)^{3n+1}$ e como

$$\frac{n^2}{3n^2-n-1} < \frac{n^2}{2n^2} < \frac{1}{2},\ n \geq 2,$$

(pois $3n^2 - n - 1 > 2n^2$, $n \geq 2$), portanto

$$\left(\frac{n^2}{3n^2-n-1}\right)^{3n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^n.$$

Série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n}$ converge, portanto (pelo Teste de Comparação), $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge absolutamente. ;-)

■ **Exemplo 6.7** Estude tipo de convergência da série$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n^p}$, com $p > 0$.

Solução. Seja $y_n = \frac{\ln n}{n^p} > \frac{1}{n^p}$, $n \geq 3$ para $0 < p \leq 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ não converge absolutamente, pelo (TC), pois $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge (série harmônica com $p \leq 1$).

Seja $p > 1$ e $p = 1 + \varepsilon$ com $\varepsilon > 0$. Neste caso

$$\ln n < n^{\frac{\varepsilon}{2}}, \quad n \geq n_0,$$

(isso segue do fato que $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{\varepsilon}{2}}} = 0$). Assim

$$y_n = \frac{\ln n}{n} < \frac{n^{\frac{\varepsilon}{2}}}{n^p} = \frac{n^{\frac{\varepsilon}{2}}}{n^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}, \quad n \geq n_0.$$

Série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}$ converge, assim $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$ converge, ou $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge absolutamente para $p > 1$.

Estudamos convergência condicional para $0 < p \leq 1$ usando o teste de Leibniz. Temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^p} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{px^{p-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{px^p} = 0.$$

Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x^p}$, com $x > 0$. Assim

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^p - p \cdot x^{p-1} \cdot \ln x}{x^{2p}} = \frac{x^{p-1}(1 - p\ln x)}{x^{2p}}$$

Assim $f'(x) < 0$ se e somente se $1 - p\ln x < 0$, ou equivalente $\ln x > \frac{1}{p}$ e $x > e^{\frac{1}{p}}$.

Assim $f(x)$ decresce para $x > e^{\frac{1}{p}}$, portanto $\{\frac{\ln n}{n^p}\}$ decresce para $n > e^{\frac{1}{p}}$. Assim $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge condicionalmente para $0 < p \leq 1$. ;-)

■ **Exemplo 6.8** Estude tipo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+(\ln n)^2}$.

Solução. Seja $x_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+(\ln n)^2}$. Usamos Teste de Integral. Seja $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+(\ln x)^2}$. Temos que $f(x)$ é contínua positiva, decrescente e $f(n) = x_n$. Agora

$$\int \frac{dx}{x(1+(\ln x)^2)} = \left| \ln x = u, du = \frac{dx}{x} \right| = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u = \arctan(\ln x),$$

logo

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+(\ln x)^2)} = \lim_{b\to\infty} \arctan(\ln x)\Big|_1^b = \frac{\pi}{2}.$$

Portanto a série converge. ;-)

Obs Teste de Integral é útil quando

$$x_n = g'(n)F(g(n)).$$

No exemplo anterior com $x_n = \frac{1}{n(1+(\ln n)^2)}$ temos $g(x) = \ln x$ e $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

■ **Exemplo 6.9** Quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n \operatorname{sen}^{2n}(x)}{n}$ converge?

Solução. Seja $x_n = (-1)^n \dfrac{2^n \operatorname{sen}^{2n}(x)}{n}$. Assim

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\operatorname{sen}^{2(n+1)}(x)}{n+1}\cdot\frac{n}{2^n\operatorname{sen}^{2n}(x)} = 2\lim_{n\to\infty}[\operatorname{sen}^2(x)\frac{n}{n+1}] = 2\operatorname{sen}^2 x.$$

Pelo Teste de razão série converge se $2\operatorname{sen}^2 x < 1$ (e diverge se $2\operatorname{sen}^2 x > 1$) ou seja

$$|\operatorname{sen} x| < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in (-\frac{\pi}{4}+k\pi; \frac{\pi}{4}+k\pi).$$

Agora analizaremos o caso $2\operatorname{sen}^2 x = 1$ ou seja $x = \pm\frac{\pi}{4}+k\pi$. Neste caso temos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

que converge pelo T. de Leibniz. Assim, a série inicial converge para $x \in [\frac{\pi}{4}+k\pi; \frac{\pi}{4}+k\pi]$. ;-)